

Apelidos: ..... Nome: .....

### EXAME DE MECÁNICA CLÁSICA I

Curso 2021-22 22 de Decembro de 2021

• Problema 1

Unha partícula de masa  $m$  está sometida a unha forza unidimensional  $\vec{F} = (-kx + bx^3) \hat{x}$ , sendo  $k$  e  $b$  constantes positivas e  $\hat{x}$  o vector unitario na dimensión  $x$ .

1. Representa a enerxía potencial  $V(x)$  e discute o movemento da partícula en función da enerxía total.
2. Obtén a frecuencia das pequenas oscilacións ao redor dun posible punto de equilibrio estable  $x = x_0$ .
3. Se a partícula parte do punto de equilibrio estable  $x_0$  con velocidade  $v_0$ , calcula o valor mínimo  $v_{\min}$  de  $v_0$  para que a masa chegue dende  $x_0$  a  $x \rightarrow \infty$ .

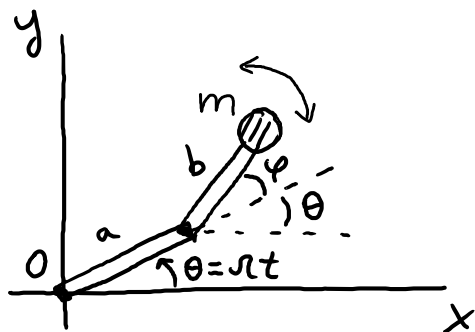
• Problema 2

Unha masa  $m$  está situada no extremo dunha barra de lonxitude  $b$  que pivota libremente do extremo doutra barra de lonxitude  $a$  que á súa vez xira con velocidade angular constante,  $\dot{\theta} = \Omega$ , ao redor dun punto  $O$  (ver figura). O movemento desenvólvese no plano  $xy$ . Tendo en conta que as barras son inextensibles e de masa desprezable, e que non hai rozamento nin gravidade, a lagranxiana da partícula é:

$$L = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\varphi}^2 + m a b \Omega^2 \cos \varphi$$

sendo  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  o ángulo que forman as direccións das barras.

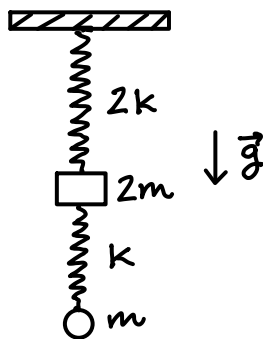
1. Indica o número de graos de liberdade do problema e a(s) ecuación(s) de ligadura. Escribe as ecuacións de transformación entre coordenadas.
2. Determina a ecuación diferencial do movemento. Identifica o sistema físico a que corresponde.
3. Acha a función de Hamilton,  $H$ , e a enerxía,  $E=T+V$ , indicando se se conservan.
4. Explica o movemento usando o método do potencial efectivo. Calcula a frecuencia de pequenas oscilacións ao redor do equilibrio.



• Problema 3

Dúas partículas de masas  $2m$  e  $m$  están suspendidas de sendos resortes de constantes de recuperación  $2k$  e  $k$  respectivamente unidos entre sí (ver figura). O sistema está sometido á forza da gravidade terrestre.

1. Escribe a enerxía cinética  $T$  e potencial  $V$  do sistema en coordenadas xeneralizadas.
2. Atopa as matrices  $m \equiv m_{jk}$  e  $A \equiv A_{jk}$  do sistema de osciladores acoplados.
3. Calcula as frecuencias propias e determina os modos normais de oscilación. Debuxa de maneira esquemática eses modos explicando como se move o sistema en cada un deles.
4. Cómo oscilaría o sistema en ausencia de gravidade  $g = 0$ ? Razona a resposta.



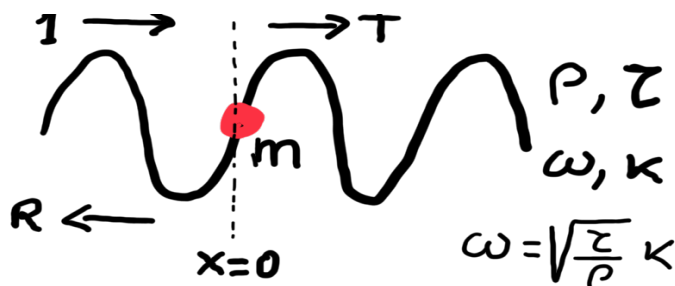
• Problema 4

Considera a reflexión e transmisión de ondas harmónicas  $\Psi$  nunha corda vibrante de densidade  $\rho$  e tensión  $\tau$  constantes, que ten unha masa  $m$  en  $x = 0$  (ver figura). A masa, arrastrada pola corda, só pode moverse perpendicularmente á dirección de propagación da onda. Desprezade o efecto da gravidade.

1. Para unha onda incidente de amplitude unidade calcula a amplitude da onda reflectida,  $R$ , e a da transmitida,  $T$ , en  $x = 0$ . Utiliza as condicións de contorno dadas por:

$$\Psi(0^+, t) = \Psi(0^-, t); \quad \tau \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} - \tau \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} = m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$$

2. Determina o cambio de fase na reflexión e na transmisión.



Unha partícula de masa  $m$  está sometida a unha forza unidimensional  $\vec{F} = (-kx + bx^3) \hat{x}$ , sendo  $k$  e  $b$  constantes positivas e  $\hat{x}$  o vector unitario na dimensión  $x$ .

1. Representa a enerxía potencial  $V(x)$  e discute o movemento da partícula en función da enerxía total.
2. Obtén a frecuencia das pequenas oscilacións ao redor dun posible punto de equilibrio estable  $x = x_0$ .
3. Se a partícula parte do punto de equilibrio estable  $x_0$  con velocidade  $v_0$ , calcula o valor mínimo  $v_{\min}$  de  $v_0$  para que a masa chegue dende  $x_0$  a  $x \rightarrow \infty$ .

1) Forza unidimensional que depende da posición  $\Rightarrow$  deriva dun potencial

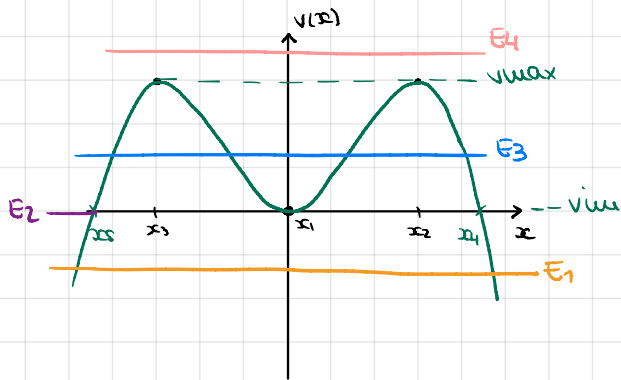
$$\vec{F} = (-kx + bx^3) \hat{x} \quad ; \quad F = -kx + bx^3$$

$$V(x) = + \int kx dx - \int bx^3 dx + V_0 = k \frac{x^2}{2} - b \frac{x^4}{4} + V_0$$

Fixamos el origen de potenciales en  $x=0 \Rightarrow V(x=0) = V_0 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(x) = k \frac{x^2}{2} - b \frac{x^4}{4}$$

Representamos gráficamente:



buscamos máximos y mínimos de potencial:

$$\frac{dV}{dx} = kx - bx^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = \sqrt{k/b} \\ k - bx^2 = 0 \Rightarrow & x_3 = -\sqrt{k/b} \end{cases}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k - 3bx^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_1} = k > 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_2} = k - 3b \frac{k}{b} = -2k < 0 \rightarrow \text{máximo} \\ \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_3} = -2k < 0 \rightarrow \text{máximo} \end{cases}$$

$V_{\min} = V(x_1) = 0$  (en este caso es nuestro origen de potenciales)

$$V_{\max} = V(x_2) = V(x_3) = \frac{k^2}{4b} > 0$$

$E_1$  cuando la energía total de la partícula es  $E < 0$ , que implica que la energía potencial es mayor en módulo que la cinética ( $|V| > K$ )

$E_2$  cuando  $E = V_{\min} = 0$ , se parte de  $x_1$ , la partícula permanece en reposo, toda la energía es potencial, pero que la cinética es nula. Los otros posicionados por  $E=0$  son  $x_2$  y  $x_3$ , donde la partícula se irá a  $\infty$  o  $-\infty$  (igual a mínimos de  $V$ ) aumentando su  $E_c$ .

cuando en  $E = V_{\max}$  la partícula no tiene suficiente energía para pasar la barrera del potencial

$E_3$  cuando  $0 = V_{\min} < E \leq V_{\max}$ , si la partícula parte de  $x \in (x_2, x_3)$  oscilará alrededor de  $x_1$ , donde el potencial se anula y la energía cinética es máxima. Oscilará entre un  $x_{\min}$  y un  $x_{\max}$  comprendidos en ese intervalo, al llegar a ellos toda la energía cinética se convierte en potencial.

$E_4$  Cuando  $E > V_{max}$  la partícula tiene suficiente energía como para moverse por todo el dominio del espacio y se irá a  $\infty$  o  $-\infty$ , ya que tenderá al mínimo de energía potencial.

## 2) Frecuencia de pequeños oscilaciones

El punto de equilibrio estable será el mínimo de potencial  $x = x_0 \equiv x_0 = 0$

vamos a aproximar la función del potencial alrededor de este punto:

$$V(x) = k \frac{x^2}{2} - b \frac{x^4}{4} ; \quad V(x) \approx \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \text{expresión análoga a la del potencial elástico}$$

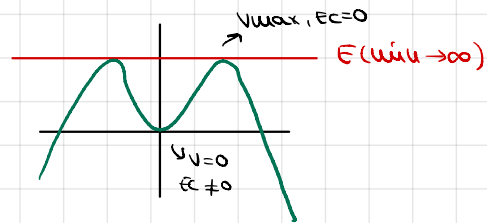
Su frecuencia para pequeños oscilaciones será

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

3) cuando la partícula parte de  $x_0$ , se pretende llegar al infinito a energía mínima que ven que leval debe permitirle llegar al máximo de potencial.

$$E(x_0) = V(x_0) + \frac{1}{2} m v_0^2 = E(x_2) = E(x_3) = \frac{k^2}{4b}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{k^2}{4b} ; \quad v_0^2 = \frac{k^2}{2mb} ; \quad v_0 = \pm k / \sqrt{2mb}$$



Para que llegue a  $\infty$  :  $v_{in} > k / \sqrt{2mb}$

como dijimos antes, consiguiendo  $E = V_{max}$  aún así la partícula no se llega a superar la barrera del potencial y oscila entre los máximos.

En el momento en el que se le aplica un mínimo más de energía, es decir, en el momento en el que se desplaza un  $\Delta x$  alejándose del origen de potenciales, se va a  $\infty$  o  $-\infty$ , ya que un máximo de potencial no deja de ser un punto de equilibrio ( $dV/dx = 0$ ) pero inestable.

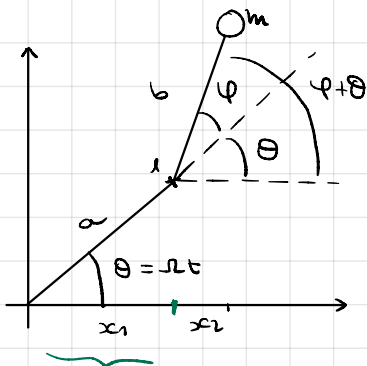
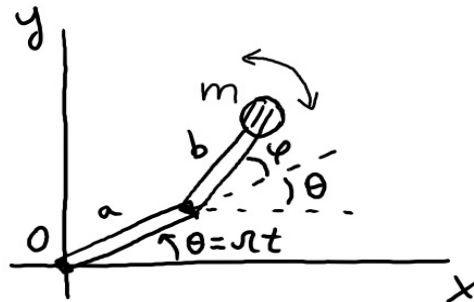
→ no hay fuerzas

Unha masa  $m$  está situada no extremo dunha barra de lonxitude  $b$  que pivota libremente do extremo doutra barra de lonxitude  $a$  que á súa vez xira con velocidade angular constante,  $\dot{\theta} = \Omega$ , ao redor dun punto  $O$  (ver figura). O movemento desenvólvese no plano  $xy$ . Tendo en conta que as barras son inextensibles e de masa desprezable, e que non hai rozamento nin gravidade, a lagrangiana da partícula é:

$$L = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\varphi}^2 + m a b \Omega^2 \cos \varphi$$

sendo  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  o ángulo que forman as direccións das barras.

1. Indica o número de graos de liberdade do problema e a(s) ecuación(s) de ligadura. Escribe as ecuacións de transformación entre coordenadas.
2. Determina a ecuación diferencial do movemento. Identifica o sistema físico a que corresponde.
3. Acha a función de Hamilton,  $H$ , e a enerxía,  $E=T+V$ , indicando se se conservan.
4. Explica o movemento usando o método do potencial efectivo. Calcula a frecuencia de pequenas oscilacións ao redor do equilibrio.



1 partícula x 2 dimensións - 1 ligadura = 1 grao liberdade ( $\varphi$ )

La ligadura sería  $\theta = \Omega t$  ya que nos permite conocer  $\theta$  en todo momento. Nos quedaría por determinar  $\varphi$  para conocer la posición de  $m$ .

Ecuacións de transformación

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 = a \cos(\Omega t) + b \cos(\Omega t + \varphi) \\ y = y_1 + y_2 = a \sin(\Omega t) + b \sin(\Omega t + \varphi) \end{cases}$$

2) Ecuación diferencial del mov.

$L = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\varphi}^2 + m a b \Omega^2 \cos \varphi$  ; ecuacións Euler-Lagrange:

$$\square : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m b^2 \dot{\varphi}) + m a b \Omega^2 \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \cancel{m} b^2 \ddot{\varphi} + \cancel{m} a b \Omega^2 \sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{a}{b} \Omega^2 \sin(\varphi) \rightarrow \text{es vet de la aceleración de la gravedad aparece la centrífuga (a\Omega^2)}$$

¿sistema físico a que se corresponde?  $\Rightarrow$  péndulo simple sobre el que actúa fuerza centrífuga

3) Función  $H, E$  y una que se conserva

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mb^2 \dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mb^2}$$

$$H = p_\varphi \cdot \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{p_\varphi^2}{mb^2} - \frac{1}{2} mb^2 \cdot \frac{p_\varphi^2}{m^2 b^4} - mab r^2 \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_\varphi^2}{mb^2} - mab r^2 \cos \varphi \neq E$$

$H \neq E \Rightarrow$  lo cual tiene sentido ya que las ecuaciones de transformación dependen de  $t$

explícitamente

$$\text{Como } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{H \text{ se conserva}}$$

que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  no quiere decir que  $\mathcal{L}$  se conserve, y como  $\mathcal{L} = T = E$  ( $V=0$ ), no podemos afirmar que  $E$  se conserve, solo que no depende explícitamente del tiempo ( $\partial E / \partial t = 0$ ) (Para que se conserve se tiene que anular la derivada total).

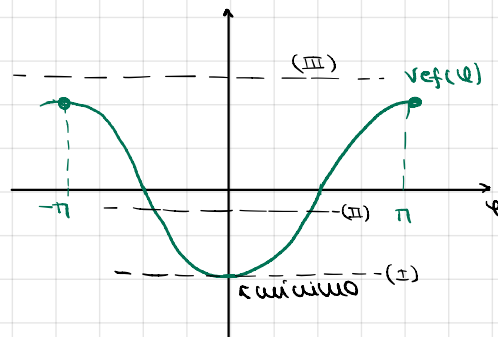
Además sabemos que no se conserva por la ligadura  $\mathcal{Q} = \pi t$ , lo cual implica que al brato se le suministra energía para que se mueva, por lo que no se conserva si.

$$4) \quad H = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{mb^2}}_{\text{termino cinético}} - \underbrace{mab r^2 \cos(\varphi)}_{\text{potencial efectivo}} \Rightarrow V_{\text{ef}}(\varphi) = -mab r^2 \cos(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} V_{\text{ef}}(\varphi) = mab r^2 \sin(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} V_{\text{ef}} \Big|_{\varphi_0} = 0 \Leftrightarrow \varphi_0 = 0 \Rightarrow \text{mínimo estable}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \pi \\ \varphi_2 = -\pi \end{array} \right\} \text{máximos}$$

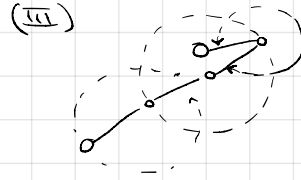
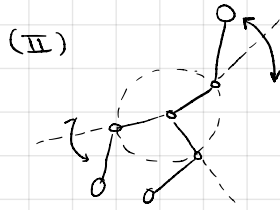
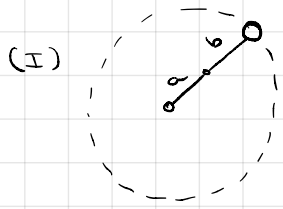


Estudiamos el movimiento en función de la energía:

(I) cuando  $E = V_{\text{mín}} = V_{\text{ef}}(\varphi_0) = -mab r^2$  la partícula se encuentra en reposo en  $\varphi_0$  ya que toda su energía es potencial. En este caso la masa no se mueve respecto del sistema no-inercial aunque el sistema gire a velocidad constante

(II) cuando  $V_{\text{mín}} < E < V_{\text{máx}} \Rightarrow V(\varphi_0) < E < V(\varphi_1) = V(\varphi_2)$  la partícula oscila alrededor de  $\varphi_0$  alcanzando un  $\varphi_{\text{mín}}$  y un  $\varphi_{\text{máx}}$  en los cuales su energía cinética se anula

(II) cuando  $E > v_{max}$ , la masa oscila indefinidamente entre  $-\pi$  y  $\pi$



para calcular la  $\omega$  pequeños oscilaciones hacemos desarrollo de Taylor del potencial alrededor de  $\varphi_0 = 0$ .

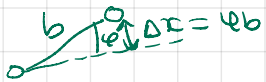
$$V(\varphi) = -mab\Omega^2 \cos(\varphi)$$

$$\begin{aligned} V(\varphi) &\approx -mab\Omega^2 \cos(\varphi_0) + \frac{1}{2!} mab\Omega^2 (\varphi - \varphi_0)^2 - \frac{1}{3!} mab\Omega^2 (\varphi - \varphi_0)^3 + \dots = \\ &= -mab\Omega^2 + \frac{1}{2} (mab\Omega^2) (\varphi)^2 = -mab\Omega^2 + \frac{1}{2} \left( mab\frac{\Omega^2}{b^2} \right) (\varphi b)^2 \end{aligned}$$

Comparando con el potencial elástico  $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$  cuya frecuencia para pequeños oscilaciones es  $\omega = \sqrt{k/m}$ :

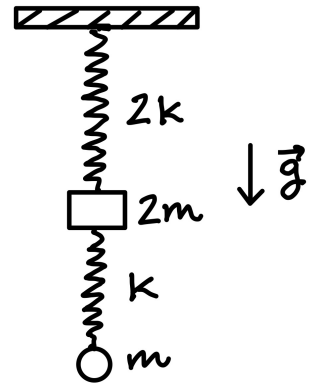
$$k \equiv m \frac{a}{b} \Omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mab\Omega^2}{mb}} \Rightarrow \omega = \Omega \sqrt{\frac{a}{b}}$$

⊕ Para poder compararlo con el elástico en dimensiones de  $x$  ( $\frac{1}{2} kx^2$ ) tenemos que su de distancia, no puede ser solo la coordenada angular, hay que multiplicarla por el radio para obtener el  $\Delta x$  para que den bien las dimensiones, si no la  $\omega$  no tendría unidades de  $s^{-1}$ .

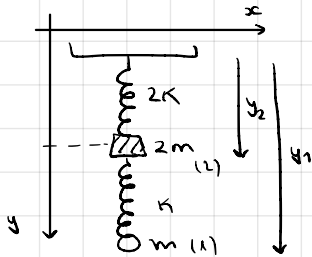


• Problema 3

Dúas partículas de masas  $2m$  e  $m$  están suspendidas de sendos resortes de constantes de recuperación  $2k$  e  $k$  respectivamente unidos entre sí (ver figura). O sistema está sometido á forza da gravidade terrestre.



1. Escribe a enerxía cinética  $T$  e potencial  $V$  do sistema en coordenadas xeneralizadas.
2. Atopa as matrices  $m \equiv m_{jk}$  e  $A \equiv A_{jk}$  do sistema de osciladores acoplados.
3. Calcula as frecuencias propias e determina os modos normais de oscilación. Debuxa de maneira esquemática eses modos explicando como se move o sistema en cada un deles.
4. Cómo oscilaría o sistema en ausencia de gravidade  $g = 0$ ? Razona a resposta.



2 partículas x 1 dimensión - osciladores = 2 graos liberdade ( $y_1, y_2$ )

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} 2m \dot{y}_2^2$$

$$V = -mgy_1 - 2mgy_2 + \frac{1}{2} 2k y_2^2 + \frac{1}{2} k (y_2 - y_1)^2$$

eso lo planteé considerando que la longitud del muelle en reposo es cero.

b)  $\{m\} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$  ;  $T = \frac{1}{2} (m) \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} (2m) \dot{y}_2^2 \equiv \frac{1}{2} m_{11} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_{22} \dot{y}_2^2 + m_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_2$

= 0  $\{m\} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$

$\{A\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} \end{pmatrix}$  (requerir derivaciones)

$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} = -mg + \frac{1}{2} k \cdot 2(y_2 - y_1) \cdot (-1)$  ;  $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} = -k$

$\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} = -2mg + \frac{1}{2} 2k \cdot 2y_2 + \frac{1}{2} k \cdot 2(y_2 - y_1) \cdot 1$  ;  $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} = 3k$

$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} = -\frac{1}{2} k \cdot 2 = -k$  ;  $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_1} = -\frac{1}{2} k \cdot 2 = -k$

= 0  $\{A\} = \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & 3k \end{pmatrix}$

c) Aplico a la ecuación de Euler

$\det(\{A\} - \omega^2 \{m\}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k \\ -k & 3k - \omega^2 2m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3k^2 - \omega^2 2km - \omega^2 3km + \omega^4 2m^2 - k^2 = 0$

$\omega^4 (2m^2) - \omega^2 (5km) + 2k^2 = 0$

$\omega^2 = \frac{5km \pm \sqrt{25k^2 m^2 - 16k^2 m^2}}{4m^2} = \frac{5km \pm 3km}{4m^2} = \frac{k(5 \pm 3)}{4m}$  }  $\omega^2 = \frac{8k}{4m} = \frac{2k}{m}$   
 $\omega^2 = \frac{2k}{4m} = \frac{k}{2m}$

Frecuencias de resonancia:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$      $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

Calculamos sus vectores propios:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\begin{pmatrix} k - \frac{2k}{m} & -k \\ -k & 3k - \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -k - k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -a_1k - a_2k = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = -a_2 = a$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$\begin{pmatrix} k - \frac{k}{2m} & -k \\ -k & 3k - \frac{k}{2m} \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{2}b_1 - kb_2 = 0 \\ -kb_1 + 2kb_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 2b_2 = 2b$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

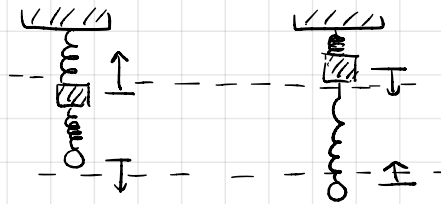
Calculamos los modos normales:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \eta_1 a + 2\eta_2 b \\ y_2 = -\eta_1 a + \eta_2 b \end{cases}$$

modo  $\eta_1$

$$\begin{cases} y_1 = a\eta_1 \\ y_2 = -a\eta_1 \end{cases}$$

los masos se mueven  
la misma magnitud  
en sentidos opuestos

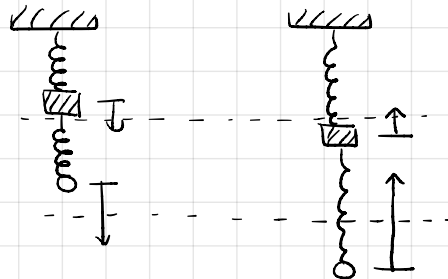


con frecuencia  $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

modo  $\eta_2$

$$\begin{cases} y_1 = 2b\eta_2 \\ y_2 = b\eta_2 \end{cases}$$

los masos se mueven  
magnitudes diferentes  
en el mismo sentido.  
a veces de abajo  
o sea con una amplitud  
del doble del del arriba



alguna otra movimiento sus contribuciones lineal estos enunciados.

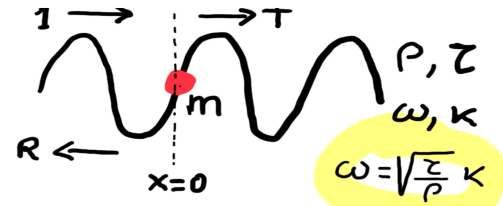
4) En ausencia de gravedad o potencial tierra de depender de masa, pero si no con afecta a  $\omega_{ij}$ , lo igual que a energía mecánica, consecuencia a enunciado mejor e os seus resultados tampoco cambian e o sistema se mueve de igual manera.

Esto se debe a que o potencial elástico (segundo orde) é muito mais importante que o gravitatorio (primero orde), polo que non afecta ao movemento en ressonancia.

⊕ ⇒ El potencial gravitatorio solo interuye en la posición en reposo.

• Problema 4 ORDINARIA 2018-2019 **ESTE LO TIENE MEJOR RESUELO NENELE**

Considera a reflexión e transmisión de ondas harmónicas  $\Psi$  nunha corda vibrante de densidade  $\rho$  e tensión  $\tau$  constantes, que ten unha masa  $m$  en  $x = 0$  (ver figura). A masa, arrastrada pola corda, só pode moverse perpendicularmente á dirección de propagación da onda. Desprezade o efecto da gravidade.



1. Para unha onda incidente de amplitude unidade calcula a amplitude da onda reflectida,  $R$ , e a da transmitida,  $T$ , en  $x = 0$ . Utiliza as condicións de contorno dadas por:

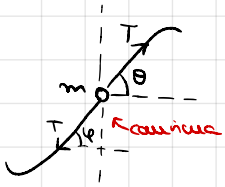
$$\Psi(0^+, t) = \Psi(0^-, t); \quad \tau \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} - \tau \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} = m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$$

2. Determina o cambio de fase na reflexión e na transmisión.

incidente  $\psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$   
 reflectada  $\psi(x,t) = R e^{i(\Theta kx - \omega t)}$  → en sentido oposto  
 transmitida  $\psi(x,t) = T e^{i(kx - \omega t)}$

→ Examen ordinaria 2018-2019

- ⊙) la condición  $\Psi(0^+, t) = \Psi(0^-, t)$  nos dice que la función es continua en  $x=0$



Aplicamos la 2ª ley de Newton para los puntos en el eje y

$$\tau \cos \theta - \tau \cos \phi = m \cdot a_y, \quad \text{para } \theta \ll 1, \quad \cos \theta \approx \tan \theta$$

$$\tau \cdot \tan \theta - \tau \tan \phi = m a_y \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} \\ \tan \phi = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \end{array} \right. \quad a_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$$

$$\Rightarrow \tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \right) = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$$

- a) amplitud de las ondas reflectada ( $R$ ) y transmitida ( $T$ )

consideramos una función de onda  $\psi(x,t)$  definida de la forma

$$\psi(x,t) = \begin{cases} e^{-i\omega t} (e^{ikx} + R e^{-ikx}) & x < 0 \rightarrow \text{la que se refleja al llegar a } x=0 \text{ vaia atrás} \\ e^{-i\omega t} \cdot T e^{ikx} & 0 < x \rightarrow \text{la que se transmite vaia delante} \end{cases}$$

amplitud = 1!!

Aplicando las condiciones de contorno:

$$\psi(0^-, t) = e^{-i\omega t} \cdot (1+R) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 1+R = T \Rightarrow \text{amplitud de la transmitida} = \text{suma de} \\ \psi(0^+, t) = e^{-i\omega t} \cdot T \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{la incidente + la reflejada} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} = e^{-i\omega t} (i k e^{ikx} - i k R e^{-ikx}) \Big|_{x=0^-} = e^{-i\omega t} (i k - i k R) = i k e^{-i\omega t} (1-R)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = e^{-i\omega t} \cdot i k T e^{ikx} \Big|_{x=0^+} = e^{-i\omega t} \cdot i k \cdot T = i k e^{-i\omega t} (T)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{x=0^-} = -i\omega e^{-i\omega t} (e^{ikx} + R e^{-ikx}) \Big|_{x=0^-} = -i\omega e^{-i\omega t} (1+R); \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0^-} = -\omega^2 e^{-i\omega t} (1+R); \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = -\omega^2 e^{-i\omega t} (1+R)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{x=0^+} = -i\omega e^{-i\omega t} T; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0^+} = -\omega^2 e^{-i\omega t} T; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = -\omega^2 e^{-i\omega t} (T) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$$

sumamos en la ecuación:

$$\tau i k e^{-i\omega t} (1-R) - \tau i k e^{-i\omega t} (T) = -m \omega^2 e^{-i\omega t} (1+R) = -m \omega^2 e^{-i\omega t} (T)$$

$$i\tau K (1-R - \cancel{1} - R) = -u\omega^2 (1+R) ; \quad i2\tau K R = -u\omega^2 (1+R)$$

$$R = \frac{-u\omega^2}{i2\tau K} (1+R) = \frac{i u \omega^2}{2\tau K} (1+R) = \frac{i u \omega^2}{2\tau K} + R \frac{i u \omega^2}{2\tau K}$$

$$R \left(1 - \frac{i u \omega^2}{2\tau K}\right) = \frac{i u \omega^2}{2\tau K} ; \quad \boxed{\varepsilon = \frac{u \omega^2}{2\tau K}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{i\varepsilon}{1-i\varepsilon}}$$

$$T = 1+R = 1 + \frac{i\varepsilon}{1-i\varepsilon} = \frac{1}{1-i\varepsilon} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{1-i\varepsilon}}$$

b) cambio de fase na reflexión e na transmisión

Como os coeficientes son números complexos  $\Rightarrow$  hay cambio de fase.

Intentamos escribir estos coeficientes de la forma:

$$R = |R| \cdot e^{i\varphi_R} = \frac{i\varepsilon}{1-i\varepsilon} \cdot \frac{1+i\varepsilon}{1+i\varepsilon} = \frac{i\varepsilon - \varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \quad \tan(\varphi_R) = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi_R) = \frac{\varepsilon}{-\varepsilon^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\varphi_R = \arctan(-2\tau K / m\omega^2)} = \arctan(-2\rho / \mu c)$$

$$T = |T| e^{i\varphi_T} = \frac{1}{1-i\varepsilon} \cdot \frac{1+i\varepsilon}{1+i\varepsilon} = \frac{1+i\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} ; \quad \tan(\varphi_T) = \frac{\varepsilon}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_T = \arctan(u\omega^2 / 2\tau K)} = \arctan(\mu c / 2\rho)$$

**unp.**

⊕ Que esperanzas nos da en que a masa fose moi pequena? e moi grande? destose?

$\lim_{m \rightarrow 0} R = 0$   
 $\lim_{m \rightarrow 0} T = 1$

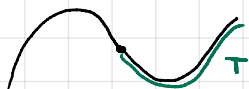
} cuando a masa é moi pequena a onda non se reflicte e se transmite en su totalidade.

$\lim_{m \rightarrow \infty} R = -1$   
 $\lim_{m \rightarrow \infty} T = 0$

} cuando a masa é moi grande a onda non se transmite e es toda reflicada

Ambos ondas van en fase con la muelle.

quando  $m \rightarrow 0$



quando  $m \rightarrow \infty$

